Cálculo Numérico

Método de Eliminação Gaussiana

Prof. Flávio Murilo de Carvalho Leal
Centro Universitário de Juazeiro do Norte
Uninassau

Objetivo do Método

- Resolver sistemas lineares do tipo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- Transformar o sistema em uma forma equivalente mais simples.
- Obter a solução por meio de substituição regressiva.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Ideia Geral do Método

- O método consiste em aplicar operações elementares às linhas da matriz aumentada $[A|\mathbf{b}]$:
  1. Troca de linhas.
  2. Multiplicação de uma linha por um escalar não nulo.
  3. Adição de um múltiplo de uma linha a outra.
- O objetivo é obter uma matriz **triangular superior**, onde os elementos abaixo da diagonal principal sejam zeros.

Etapas do Processo

1. Escrever o sistema na forma de matriz aumentada.
2. Escolher um pivô (geralmente o elemento da diagonal principal).
3. Eliminar os coeficientes abaixo do pivô.
4. Repetir o processo para as demais colunas.
5. Resolver o sistema triangular resultante por substituição regressiva.

Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + 7z = 20 \\ x + 3y + 4z = 14 \end{cases}$$

Matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 7 & 20 \\ 1 & 3 & 4 & 14 \end{array}\right]$$

Eliminando x das linhas 2 e 3:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad \text{e} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right]$$

Eliminação — Passo 2

Eliminando o termo abaixo do pivô a_{22}:

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -7 & -8 \end{array}\right]$$

Sistema triangular resultante:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + 5z = 8 \\ -7z = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = \frac{8}{7}, \quad y = 8 - 5z = \frac{16}{7}, \quad x = 6 - y - z = \frac{10}{7}$$

$$\boxed{x = \tfrac{10}{7},\ y = \tfrac{16}{7},\ z = \tfrac{8}{7}}$$

Interpretação Geométrica

- Cada equação representa um plano no espaço tridimensional.
- O método de Gauss encontra o ponto de interseção desses planos.
- Se os planos forem paralelos ou coincidentes, o sistema pode não ter solução única.

- Método sistemático e aplicável a qualquer sistema linear.
- Fácil de implementar computacionalmente.
- Pode ser adaptado para o método de **Gauss-Jordan**.
- Sensível a erros de arredondamento em cálculos numéricos.

Passos Principais

1. Montar a matriz aumentada.
2. Escolher pivôs e aplicar operações elementares.
3. Obter matriz triangular superior.
4. Resolver o sistema triangular por substituição regressiva.

Resultado

Solução única, múltiplas soluções ou sistema impossível, dependendo da consistência do sistema.